

# Pengaruh Perilaku Merokok pada Pertumbuhan Populasi Penderita Kanker Paru-Paru

Lu'luul Wardah<sup>1,3)</sup>, Trisilowati<sup>2\*</sup>, Wuryansari Muharini Kusumawinahyu<sup>2</sup>

<sup>1)</sup> Program Studi Magister Ilmu Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Brawijaya

<sup>2)</sup> Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya

<sup>3)</sup> Madrasah Aliyah Negeri 2, Blitar

Diterima 04 Oktober 2016, Direvisi 18 Mei 2017

## ABSTRAK

Artikel ini membahas pengaruh perilaku merokok baik perokok aktif maupun perokok pasif terhadap pertumbuhan populasi penderita kanker paru-paru melalui model matematika. Terdapat empat subpopulasi dalam model ini, yaitu subpopulasi rentan, subpopulasi perokok aktif, subpopulasi perokok pasif, dan subpopulasi penderita kanker paru-paru. Analisis dinamik model meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Berdasarkan hasil analisis diperoleh tiga titik kesetimbangan, yaitu titik yang menyatakan bahwa keempat subpopulasi punah, titik yang menyatakan bahwa hanya subpopulasi rentan yang mampu bertahan hidup, dan titik yang menyatakan bahwa keempat subpopulasi mampu bertahan hidup. Titik kesetimbangan pertama selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan kedua dan ketiga eksis dengan syarat tertentu. Kestabilan titik kesetimbangan pertama dicapai ketika laju pertumbuhan intrinsik kurang dari laju kematian alami, titik kesetimbangan kedua dan ketiga stabil dengan syarat tertentu. Simulasi numerik disajikan untuk mengilustrasikan hasil analisis. Hasil simulasi menunjukkan solusi numerik sesuai dengan hasil analisis. Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa laju perokok pasif memegang peranan penting dalam penyebaran penderita kanker paru-paru.

**Kata kunci:** analisis dinamik, perokok aktif, perokok pasif, kanker paru-paru.

## ABSTRACT

This article discusses a model of lung cancer as the effect of smoking behavior on both active and passive smoker. There are four subpopulations in this model, namely susceptible subpopulation, active smoker subpopulation, passive smoker subpopulation, and subpopulation of lung cancer. Dynamical analysis is conducted to determine the equilibrium point, existence condition for equilibrium point, and analyze their stability. Based on analysis result, there are three equilibrium points. First equilibrium point shows that all subpopulations extinct. Second equilibrium point shows that only susceptible subpopulation can survive, and the last equilibrium point shows that all subpopulations can survive. First equilibrium point always exists while the others exist under certain condition. The stability of first equilibrium point can be reached when the intrinsic growth rate is less than the death rate. Whereas, the others equilibrium points will be stable under certain condition. Numerical simulation is performed to illustrate the analysis result. It is shown that numerical results are in accordance with analysis result. These numerical simulations also indicate that the rate of passive smoker plays important role in the growth rate of lung cancer.

**Keywords:** dynamical analysis, active smokers, passive smokers, lung cancer.

## PENDAHULUAN

Berdasarkan data dari Globocan [1] menyatakan bahwa jumlah penderita kanker

semakin meningkat dari tahun ke tahun. Selanjutnya, Globocan [1] menyebutkan bahwa diagnosa kanker yang paling umum di dunia adalah kanker paru-paru, yaitu 1,8 juta atau 13% dari keseluruhan kasus kanker. Beberapa penelitian mengenai risiko yang mungkin dialami perokok menunjukkan bahwa perokok mempunyai kemungkinan sebelas kali

-----  
\*Corresponding author:  
E-mail: trisilowati@ub.ac.id

mengidap penyakit kanker paru-paru yang menyebabkan kematian daripada bukan perokok [2]. Risiko tersebut sesungguhnya bukan hanya ditanggung oleh perokok aktif saja melainkan juga oleh perokok pasif, yaitu orang-orang di sekitar perokok yang tidak merokok tetapi harus menghirup asap rokok. Beberapa penelitian melaporkan bahwa sekitar 20% - 30% kejadian terkena risiko penyakit kanker paru-paru dialami oleh perokok pasif [3].

Model matematika dapat menjelaskan hubungan antara perokok pasif maupun aktif dan penderita penyakit kanker paru-paru. Model matematika yang terkait dengan perilaku merokok dan kanker paru-paru telah dilakukan oleh beberapa peneliti [4–8]. Kemudian di tahun 2000 dilakukan pemodelan hubungan antara perokok, bukan perokok, dan penderita kanker paru-paru [9]. Samanta [10] pada tahun 2011 memodelkan perilaku merokok sebagai sistem dinamik nonotonomus dengan waktu tunda. Analisis kestabilan global pada model tersebut dilakukan pula dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

Berbeda dari Carlos, dkk. [9] dan Samanta [10], pada tahun 2016 Sutantiati [11] memodelkan perilaku perokok aktif, perokok pasif, dan pengaruhnya terhadap penderita penyakit kanker paru-paru. Berdasarkan model tersebut subpopulasi rentan tumbuh secara eksponensial. Selain itu, diasumsikan pula bahwa interaksi antara perokok aktif dan pasif tidak menambah jumlah perokok aktif secara langsung. Hasil analisis dan hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa laju perokok aktif berpengaruh dalam penyebaran penderita kanker paru-paru. Penelitian ini akan dibahas kembali model pada Sutantiati [11] dengan melakukan beberapa modifikasi pada model agar menjadi lebih realistis.

## METODE PENELITIAN

**Konstruksi Model.** Berikut ini merupakan model kanker paru-paru yang telah dikembangkan oleh Sutantiati [11] yaitu

$$\frac{dS}{dt} = A - \alpha SI_a - \mu S$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \alpha_2 SI_a - \gamma I_a - \mu I_a \quad (1)$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \alpha_1 SI_b - \beta I_a I_b - \gamma I_b - \mu I_b$$

$$\frac{dC}{dt} = \gamma I_a + \gamma I_b - \mu C$$

Modifikasi dilakukan pada model di atas, pertama yaitu dengan mengubah laju kelahiran eksponensial pada subpopulasi rentan dengan laju kelahiran logistik sehingga parameter laju kelahiran subpopulasi rentan  $A$  pada persamaan (1) sehingga menjadi

$$A = rS \left( 1 - \frac{S}{K} \right)$$

Modifikasi kedua adalah interaksi antara perokok aktif dan pasif menambah jumlah perokok aktif sehingga pada ruas kanan persamaan kedua sistem persamaan (1) terdapat penambahan suku  $\beta I_a I_b$ . Modifikasi tersebut menghasilkan model kanker paru-paru akibat perilaku merokok sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = rS \left( 1 - \frac{S}{K} \right) - \alpha SI_a - \mu S \quad (2)$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \alpha_1 SI_a - \beta I_a I_b - \gamma I_b - \mu I_b$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \alpha_2 SI_a + \beta I_a I_b - \gamma I_a - \mu I_a$$

$$\frac{dC}{dt} = \gamma I_a + \gamma I_b - \mu C$$

Dimana,

$S$  = kepadatan subpopulasi rentan setiap saat

$I_a$  = kepadatan subpopulasi perokok aktif setiap saat

$I_b$  = kepadatan subpopulasi perokok pasif setiap saat

$C$  = kepadatan subpopulasi penderita kanker paru-paru setiap saat

$r$  = laju pertumbuhan intrinsik

$K$  = *carrying capacity*

$\mu$  = laju kematian alami

$\alpha$  = laju perubahan jumlah individu rentan menjadi perokok

$\beta$  = laju perubahan jumlah individu perokok pasif menjadi perokok aktif

$\gamma$  = tingkat kejadian penyakit kanker paru-paru

$\alpha_1$  = laju perokok pasif

$\alpha_2$  = laju perokok aktif.

Sistem (2) merupakan sistem persamaan diferensial biasa non-linear dengan  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ , dan  $K$  merupakan konstanta positif.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

**Titik Keseimbangan.** Titik keseimbangan sistem (2) diperoleh dari solusi sistem persamaan berikut,

$$\begin{aligned} rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha SI_a - \mu S &= 0 \\ \alpha_1 SI_a - \beta I_a I_b - \gamma I_b - \mu I_b &= 0 \\ \alpha_2 SI_a - \beta I_a I_b - \gamma I_a - \mu I_a &= 0 \\ \gamma I_a + \gamma I_b - \mu C &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Berdasarkan sistem persamaan (3) diperoleh tiga titik keseimbangan yaitu

$$E_0 = (0, 0, 0, 0);$$

$$E_1 = \left( K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right), 0, 0, 0 \right); \text{ dan}$$

$$E_2 = (S^*, I_b^*, I_a^*, C^*)$$

Titik keseimbangan  $E_0$  selalu eksis, titik keseimbangan  $E_1$  eksis jika  $\mu < r$ . Titik

keseimbangan  $E_2$  eksis dengan syarat sebagai berikut,

1.  $B_2^2 - 4B_1B_3 = 0$  dan  $B_2 < 0$  atau
2.  $B_3 < 0$  atau
3.  $B_3 > 0$  dan  $B_2 < 0$  atau
4.  $B_3 = 0$  dan  $B_2 < 0$

Dengan,

$$B_1 = \frac{\alpha^2 \beta K}{r}$$

$$B_2 = \alpha^2 \beta K \left( \frac{\mu}{r} - 1 \right) + (\gamma + \mu) \left( \beta + \frac{\alpha \alpha_2 K}{r} \right)$$

$$B_3 = (\gamma + \mu)^2 \left( 1 - \frac{\alpha_2 K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right)}{(\gamma + \mu)} \right)$$

**Kestabilan Titik Keseimbangan.** Sistem (3) merupakan sistem persamaan diferensial biasa non-linear. Kestabilan titik keseimbangan sistem ditentukan dengan menggunakan matriks Jacobi (4).

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{K}S - \alpha I_a - \mu & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha_1 I_a & -\beta I_a - \gamma - \mu & \alpha_1 S - \beta I_b & 0 \\ \alpha_2 I_a & \beta I_a & \alpha_2 S + \beta I_b - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

**Kestabilan titik keseimbangan  $E_0$ .** Jika titik keseimbangan  $E_0 = (0, 0, 0, 0)$  disubstitusikan ke matriks Jacobi (4) maka diperoleh hasil sebagai berikut,

$$J(E_0) =$$

$$\begin{bmatrix} r - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas memiliki nilai eigen  $\lambda_1 = r - \mu$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = -(\gamma + \mu)$  dan  $\lambda_4 = -\mu$ . Titik keseimbangan  $E_0 = (0, 0, 0, 0)$  bersifat stabil asimtotik jika  $r < \mu$ .

**Kestabilan Titik Keseimbangan  $E_1$ .** Jika titik keseimbangan  $E_1 = (K(1 - \frac{\mu}{r}), 0, 0, 0)$  dan disubstitusikan pada matriks Jacobi (4) diperoleh sebagai berikut,

$$J(E_1) =$$

$$\begin{bmatrix} -r + \mu & 0 & -\alpha \left( K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \right) & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & -\alpha_1 \left( K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \right) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \left( K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \right) - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks  $J(E_1)$  adalah

$$|J(E_1) - \lambda I| = 0$$

atau

$$|J(E_1) - \lambda I| = (-\mu - \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} -r + \mu - \lambda & 0 & -\alpha K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \\ 0 & -\gamma - \mu - \lambda & \alpha_1 K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \\ 0 & 0 & \alpha_2 K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) - \gamma - \mu - \lambda \end{vmatrix}$$

Oleh karena itu nilai eigen dari  $J(E_1)$  adalah  $\lambda_1 = -\mu$ ;  $\lambda_2 = -r + \mu$ ;  $\lambda_3 = -(\gamma + \mu)$  dan  $\lambda_4 = \alpha_2 K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) - \gamma - \mu$ .

Karena syarat eksistensi  $E_1$  adalah  $\frac{\mu}{r} < 1$

maka  $\lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_4 < 0$  jika  $\alpha_2 K(1 - \frac{\mu}{r}) < \gamma + \mu$ .  
Jadi nilai  $E_1$  stabil asimtotik jika

$$\frac{\alpha_2 K(1 - \frac{\mu}{r})}{\gamma + \mu} < 1$$

**Kestabilan Titik Keseimbangan  $E_2$ .** Jika titik kesetimbangan  $E_2 = (S^*, I_b^*, I_a^*, C^*)$  substitusikan pada matriks Jacobi (4) diperoleh  $J(E_2) =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{r}{K} S^* & 0 & -\alpha S^* & 0 \\ \alpha_1 I_a^* & -\beta I_a^* - \gamma - \mu & \alpha_1 S^* - \beta I_b^* & 0 \\ \alpha_2 I_a^* & \beta I_a^* & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks  $J(E_2)$  adalah  $|J(E_2) - \lambda I| = 0$ . Jika disederhanakan dalam bentuk matriks akan menjadi sebagai berikut,

$$|J(E_2) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{r}{K} S^* - \lambda & 0 & -\alpha S^* \\ \alpha_1 I_a^* & -\beta I_a^* - \gamma - \mu - \lambda & \alpha_1 S^* - \beta I_b^* \\ \alpha_2 I_a^* & \beta I_a^* & -\lambda \end{vmatrix}$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut, diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu$ , dan polinom berderajat 3 dalam  $\lambda$  yaitu

$$\begin{aligned} & -\lambda^3 - \lambda^2 \left( \frac{r}{K} S^* + \beta I_a^* + \gamma + \mu \right) \\ & - \lambda \left( \frac{r}{K} S^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) + \alpha \alpha_2 S^* I_a^* \right. \\ & \left. - \beta I_a^* (\alpha_1 S^* - \beta I_b^*) \right) - \alpha \alpha_1 \beta S^* (I_a^*)^2 \\ & - \alpha \alpha_2 S^* I_a^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) + \frac{r}{K} \beta S^* I_a^* (\alpha_1 S^* \\ & \left. - \beta I_b^*) \right) = 0 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2 \left( \frac{r}{K} S^* + \beta I_a^* + \gamma + \mu \right) \\ & + \lambda \left( \frac{r}{K} S^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) + \alpha \alpha_2 S^* I_a^* \right. \\ & \left. - \beta I_a^* (\alpha_1 S^* - \beta I_b^*) \right) + \alpha \alpha_1 \beta S^* (I_a^*)^2 \\ & + \alpha \alpha_2 S^* I_a^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) - \frac{r}{K} \beta S^* I_a^* (\alpha_1 S^* \\ & \left. - \beta I_b^*) \right) = 0 \end{aligned}$$

Polinom berderajat 3 tersebut disederhanakan menjadi

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0$$

dengan

$$A_1 = \frac{r}{K} S^* + \beta I_a^* + \gamma + \mu$$

$$A_2 = \frac{r}{K} S^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) + \alpha \alpha_2 S^* I_a^* - \beta I_a^* (\alpha_1 S^* - \beta I_b^*)$$

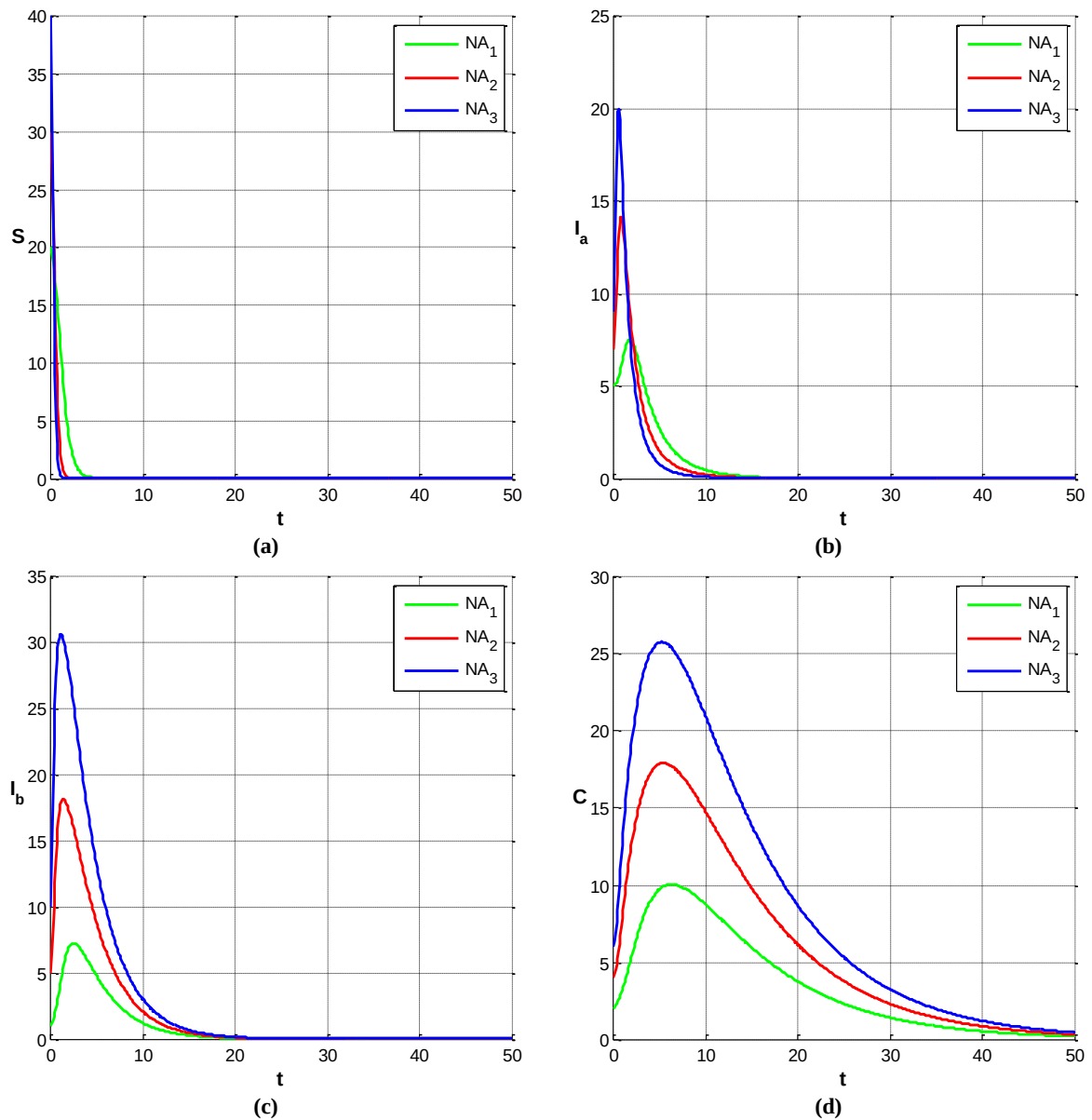
$$A_3 = \alpha \alpha_2 \beta S^* (I_a^*)^2 + \alpha \alpha_2 S^* I_a^* (\beta I_a^* + \gamma + \mu) - \frac{r}{K} \beta S^* I_a^* (\alpha_1 S^* - \beta I_b^*)$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz [12], polinom berderajat 3 memiliki akar bagian real negatif jika dan hanya jika  $A_i > 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$  dan  $A_1 A_2 - A_3 > 0$ .

**Simulasi Numerik.** Model matematika kanker paru-paru akibat pengaruh perilaku merokok dianalisis secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4.

**Simulasi Numerik Kestabilan Titik Keseimbangan  $E_0$ .** Simulasi numerik ini dilakukan untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan  $E_0$ . Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini adalah  $r = 0.01$ ,  $K = 125$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\gamma = 0.2$ . Berdasarkan syarat kestabilan,  $E_0$  dipenuhi karena  $r < \mu$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi ini menyatakan bahwa dalam jangka waktu panjang keempat subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S) subpopulasi perokok aktif ( $I_a$ ), subpopulasi perokok pasif ( $I_b$ ), dan subpopulasi yang terkena penyakit kanker paru-paru (C) akan punah.

Hasil simulasi masing-masing subpopulasi disajikan pada Gambar 1 yang diilustrasikan dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $NA_1 = (20, 1, 5, 2)$ ,  $NA_2 = (30, 5, 7, 4)$ , dan  $NA_3 = (40, 10, 9, 6)$ . Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa dalam jangka waktu panjang masing-masing subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan  $E_0 = (0, 0, 0, 0)$ . Kondisi tersebut menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal.



**Gambar 1.** Kurva kepadatan subpopulasi (a) individu rentan, (b) perokok aktif, (c) perokok pasif, dan (d) penderita kanker paru-paru yang konvergen ke titik kesetimbangan  $E_0$

**Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan  $E_1$ .** Simulasi numerik ini dilakukan untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$ . Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini adalah  $r = 0.1$ ,  $K = 124$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\alpha_1 = 0.001$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\beta = 0.02$ , dan  $\gamma = 0.2$ . Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan yaitu,

$$E_1 = (112.5, 0, 0, 0)$$

$$\frac{\alpha_2 K \left(1 - \frac{\mu}{r}\right)}{\gamma + \mu} = 0.5357$$

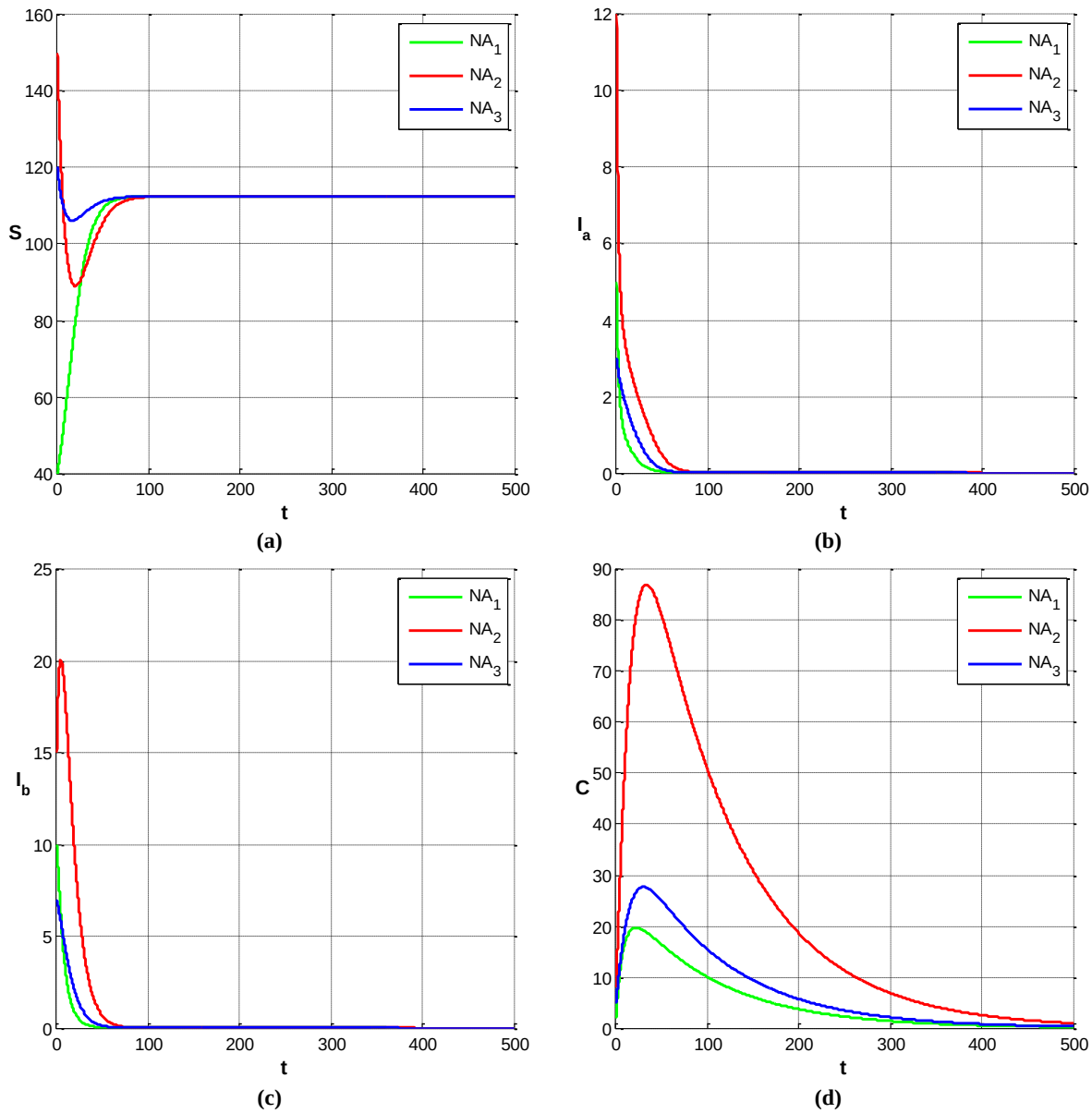
Berdasarkan syarat kestabilan, maka titik

kesetimbangan  $E_1$  stabil asimtotik lokal karena nilainya kurang dari 1.

Hasil simulasi masing-masing subpopulasi disajikan pada Gambar 2 yang diilustrasikan dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $NA_1 = (40, 10, 5, 2)$ ,  $NA_2 = (150, 15, 12, 8)$  dan  $NA_3 = (120, 7, 3, 5)$ . Berdasarkan Gambar 2 tersebut terlihat bahwa dalam jangka waktu panjang masing-masing subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan  $E_1 = (112.5, 0, 0, 0)$ . Kondisi ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat stabil asimtotik lokal dan menunjukkan bahwa dalam jangka panjang subpopulasi perokok aktif dan perokok pasif akan punah

yang mengakibatkan subpopulasi yang terkena penyakit kanker paru-paru punah pula,

sedangkan subpopulasi yang rentan dapat bertahan hidup.



**Gambar 2.** Kurva kepadatan subpopulasi (a) individu rentan, (b) perokok aktif, (c) perokok pasif, dan (d) penderita kanker paru-paru yang konvergen ke titik kesetimbangan  $E_1$

**Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan  $E_2$ .** Simulasi numerik ini dilakukan untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  dengan dua kasus, yaitu ketika sistem (3) mempunyai satu titik kesetimbangan, dan dua titik kesetimbangan.

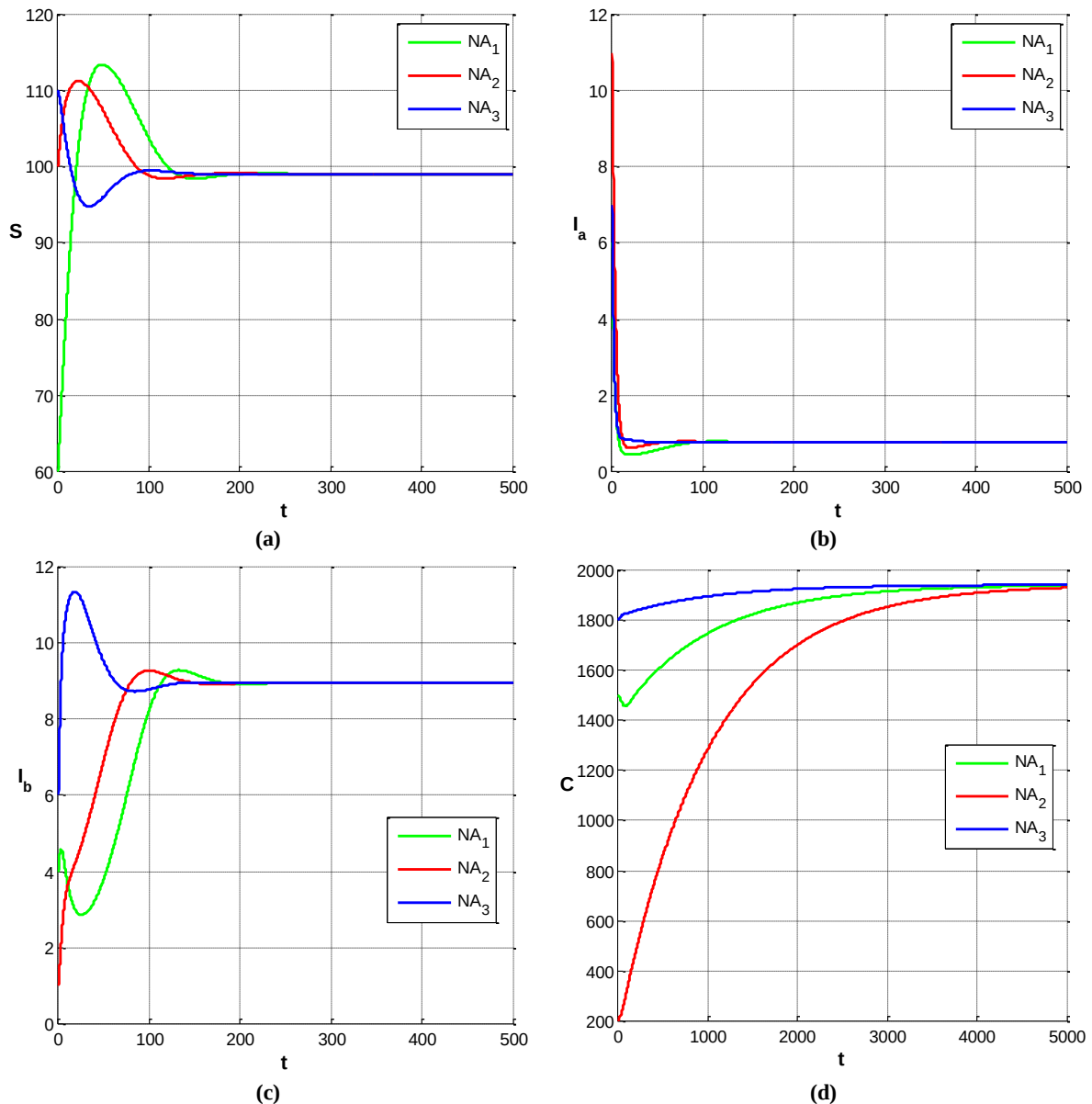
**Kasus 1.** Kasus 1 dilakukan untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan sistem (3), ketika sistem mempunyai satu titik

kesetimbangan. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini adalah  $r = 0.1$ ,  $K = 125$ ,  $\mu = 0.001$ ,  $\alpha_1 = 0.00044$ ,  $\alpha_2 = 0.00176$ ,  $\beta = 0.035$ , dan  $\gamma = 0.2$ . Sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_2 = (99.1045, 0.7593, 8.9619, 1944.2609)$ , nilai  $A_1 = 0.5939 > 0$ ,  $A_2 = 0.0389 > 0$ ,  $A_3 = 0.0016 > 0$  dan  $A_1A_2 - A_3 = 0.0214 > 0$ . Berdasarkan syarat kestabilan, maka titik kesetimbangan  $E_2$  stabil asimtotik lokal.

Hasil simulasi masing-masing subpopulasi

disajikan pada Gambar 3 yang diilustrasikan dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $NA_1 = (60, 4, 6, 1500)$ ,  $NA_2 = (100, 1, 11, 2000)$ , dan  $NA_3 = (110, 6, 7, 1800)$ . Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa dalam jangka waktu panjang masing-masing subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan  $E_2 = (99.1045, 0.7593, 8.9619, 1944.2609)$ . Kondisi tersebut menunjukkan

bahwa titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik lokal sehingga simulasi numerik kasus 1 sesuai dengan hasil analisis kestabilan. Simulasi ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang subpopulasi rentan, perokok pasif, perokok aktif, dan subpopulasi yang terkena penyakit kanker paru-paru akan bertahan hidup dan stabil menuju titik kesetimbangan.



**Gambar 3.** Kurva kepadatan subpopulasi (a) individu rentan, (b) perokok aktif, (c) perokok pasif, dan (d) penderita kanker paru-paru yang konvergen ke titik kesetimbangan  $E_2$ .

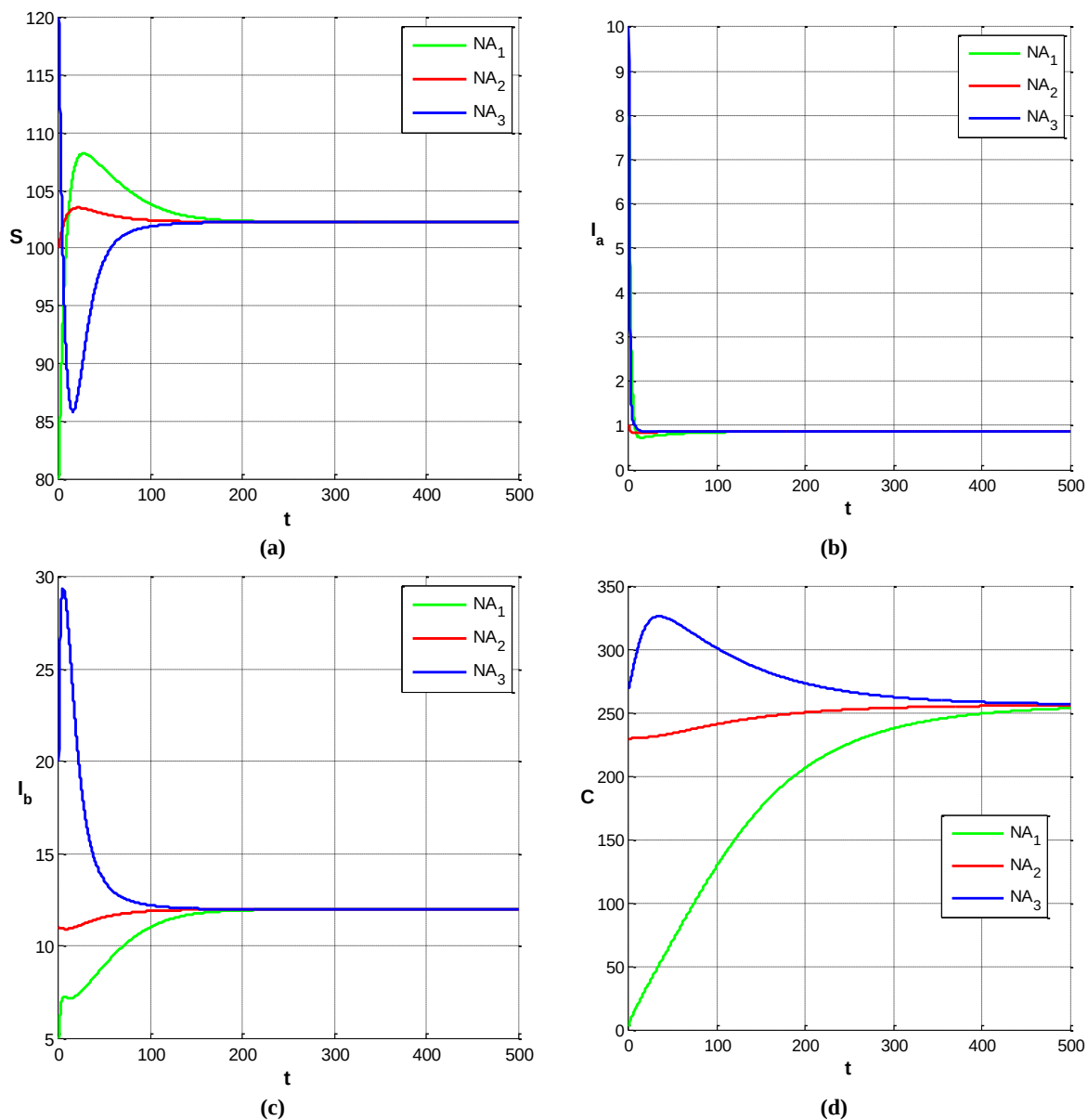
**Kasus 2.** Kasus 2 dilakukan untuk menunjukkan kestabilan dari salah satu titik kesetimbangan sistem (3) ketika sistem tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini

adalah  $r = 0.1$ ,  $K = 125$ ,  $\mu = 0.001$ ,  $\alpha_1 = 0.00044$ ,  $\alpha_2 = 0.00176$ ,  $\beta = 0.035$ , dan  $\gamma = 0.2$  sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu  $E_{21} = (118.5222, 0.0400, 0.1656, 4.1127)$  dan  $E_{22} = (102.2822, 0.8566, 11.9765, 256.6639)$ . Titik

kesetimbangan  $E_{21}$  diperoleh nilai  $A_1 = 0.4054 > 0$ ,  $A_2 = 0.04070 > 0$ ,  $A_3 = -0.00003927 < 0$ , dan  $A_1A_2 - A_3 = 0.0165 > 0$ . Berdasarkan syarat kestabilan, maka titik kesetimbangan  $E_{21}$  tidak stabil. Sedangkan titik kesetimbangan  $E_{22}$  diperoleh nilai  $A_1 = 0.7928 > 0$ ,  $A_2 = 0.0539 > 0$ ,  $A_3 = 0.0174 > 0$ , dan  $A_1A_2 - A_3 = 0.0253 > 0$ . Berdasarkan syarat kestabilan, maka titik kesetimbangan  $E_{22}$  bersifat stabil asimtotik lokal.

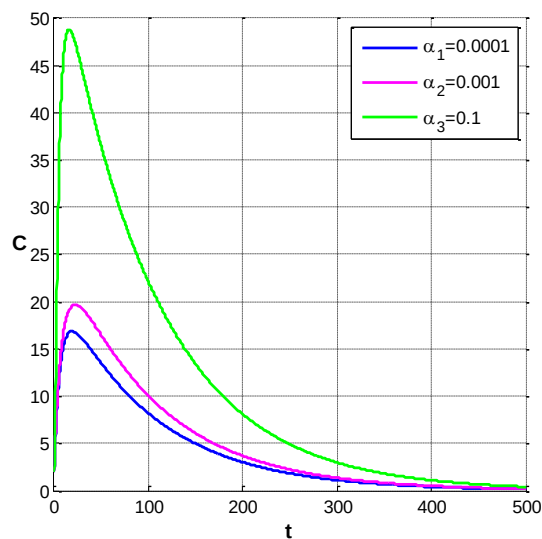
Hasil simulasi masing-masing subpopulasi disajikan pada Gambar 4 yang diilustrasikan dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu  $NA_1 = (80, 5, 8, 3)$ ,  $NA_2 = (100, 11, 1, 230)$  dan  $NA_3$

$= (120, 20, 10, 270)$ . Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa dalam jangka waktu panjang masing-masing subpopulasi menuju ke titik kesetimbangan  $E_{22} = (102.2822, 0.8566, 11.9765, 256.6639)$ . Kondisi ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $E_{21}$  tidak stabil, dan titik kesetimbangan  $E_{22}$  bersifat stabil asimtotik lokal sehingga simulasi numerik kasus 2 sesuai dengan hasil analisis syarat kestabilan. Kondisi ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang subpopulasi rentan, perokok pasif, perokok aktif, dan subpopulasi yang terkena penyakit kanker paru-paru akan bertahan hidup dan stabil menuju ke salah satu titik kesetimbangan.



**Gambar 4.** Kurva kepadatan subpopulasi (a) individu rentan, (b) perokok aktif, (c) perokok pasif, dan (d) penderita kanker paru-paru yang konvergen ke titik kesetimbangan  $E_{22}$ .





**Gambar 5.** Kurva hasil simulasi dengan nilai parameter  $\alpha_1$  terhadap kepadatan subpopulasi penderita kanker paru-paru yang konvergen ke titik kesetimbangan  $E_{22}$

Hasil simulasi dengan menggunakan beberapa nilai parameter  $\alpha_1$  yaitu 0.0001, 0.001 dan 0.1 yang ditunjukkan oleh Gambar 5 menunjukkan bahwa meningkatnya laju perokok pasif mengakibatkan meningkatnya jumlah individu perokok pasif. Selanjutnya hal ini juga akan mengakibatkan meningkatnya jumlah individu perokok aktif yang pada akhirnya akan meningkatkan jumlah penderita kanker paru-paru.

## KESIMPULAN

Model kanker paru-paru pada penelitian ini telah dikonstruksi dan dianalisis berdasarkan akibat perilaku merokok dengan pertumbuhan logistik pada populasi rentan. Model yang terbentuk merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear empat dimensi dengan empat variabel tak bebas yaitu subpopulasi rentan  $S$ , perokok pasif  $I_b$ , perokok aktif  $I_a$  dan penderita kanker paru-paru  $C$  dan delapan parameter. Berdasarkan hasil analisis dinamik diperoleh tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan  $E_0$  yang menunjukkan keempat subpopulasi punah, titik kesetimbangan  $E_1$  yang menunjukkan bahwa hanya subpopulasi rentan mampu bertahan hidup, dan titik kesetimbangan  $E_2$  yang menunjukkan bahwa keempat subpopulasi mampu bertahan hidup. Titik kesetimbangan  $E_0$  selalu eksis, sedangkan

titik kesetimbangan  $E_1$  dan titik kesetimbangan  $E_2$  eksis dengan syarat tertentu. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_0$  dicapai ketika laju pertumbuhan intrinsik kurang dari laju kematian alami, titik kesetimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  stabil dengan syarat tertentu. Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa laju perokok pasif memegang peranan penting dalam penyebaran penderita kanker paru-paru.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] WHO. (2016) Media Center: Cancer [Internet]. World Heal. Organ.
- [2] Sari, A.T.O., Ramdhani, N. dan Eliza, M. (2003) Empati dan perilaku merokok di tempat umum. *Jurnal Psikologi*, **30**, 81–90. <https://doi.org/10.22146/jpsi.7027>
- [3] Aditama, T.Y. (2007) Rokok dan Kesehatan. UI Press, Jakarta.
- [4] Darby, S.C. dan Pike, M.C. (1988) Lung cancer and passive smoking: predicted effects from a mathematical model for cigarette smoking and lung cancer. *British journal of cancer*, **58**, 825–31.
- [5] Taylor, R., Najafi, F. dan Dobson, A. (2007) Meta-analysis of studies of passive smoking and lung cancer: effects of study type and continent. *International journal of epidemiology*, **36**, 1048–59. <https://doi.org/10.1093/ije/dym158>
- [6] Andest, J.N. (2013) A Mathematical Model on Cigarette Smoking And Nicotine In The Lung. *IRJES*, **2**, 1–3.
- [7] Hndoosh, R.W., Kumar, S. dan Saroa, M.S. (2014) Fuzzy mathematical models for the analysis of fuzzy systems with application to liver disorders. *IOSR Journal of Computer Engineering*, **16**, 71–85. <https://doi.org/10.9790/0661-16577185>
- [8] Namazi, H. dan Kiminezhadmalae, M. (2015) Diagnosis of Lung Cancer by Fractal Analysis of Damaged DNA. *Computational and mathematical methods in medicine*, **2015**, 1–11. <https://doi.org/10.1155/2015/242695>
- [9] Acevedo-Estephania, C.A., Gonzalez, C., Rios-Soto, K.R. dan Summerville, E.D. (2000) A Mathematical Model for Lung Cancer: The Effects of Second-hand Smoke and Education.

- [10] Samanta, G.P. (2011) Dynamic Behaviour for a Nonautonomous Smoking Dynamical Model with Distributed Time Delay. *J Appl Math & Informatics*, **29**, 721–41.
- [11] Sutantiati, I. (2016) Analisis Dinamik Model Penyakit Kanker Paru-paru Akibat Pengaruh Perilaku Merokok. Universitas Brawijaya.
- [12] Brauer, F. dan Castillo-Chavez, C. (2010) Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology Volume 40 of Texts in Applied Mathematics. 2nd ed. Springer Science & Business Media, New York.